

Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme.

Von TIBOR RADÓ in Szeged, Ungarn.

1. In dieser Theorie unterscheidet man bekanntlich *Funktionsprobleme*, bei welchen eine Funktion $z(x, y)$ zu bestimmen ist, und *Flächenprobleme*, bei welchen es sich um die Bestimmung einer Fläche in allgemeiner Parameterdarstellung handelt.¹⁾ In dieser Note betrachten wir das folgende

Funktionsproblem. Es sei $f(p, q)$ eine für alle reelle Werte der Argumente eindeutig erklärte, etwa analytische Funktion. Sei ferner C eine einfache geschlossene Kurve in der xy -Ebene, und man betrachte die Gesamtheit der Funktionen $z(x, y)$, welche im Innern dieser Kurve eindeutig und *einmal* stetig derivierbar sind, und auf der Kurve C dieselben vorgeschriebenen Werte annehmen. Es werde angenommen, dass unter diesen Konkurrenzfunktionen eine solche gibt, für welche das über das Innere von C erstreckte Doppelintegral

$$\iint f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

einen kleinstmöglichen Wert annimmt.

Für diese Extremalfunktion sollen partielle Differentialgleichungen abgeleitet werden.

In der Folge soll der Ausdruck *Funktionsproblem* stets in diesem Sinne verstanden werden, wobei also der Nachdruck auf dem Umstande liegt, dass die Extremalfunktion nur stetige Ableitungen *erster* Ordnung zu haben braucht, die Existenz höherer Ableitungen wird nicht vorausgesetzt. Die Extremalfunktion be-

¹⁾ Vgl. BOLZA, Vorlesungen über Variationsrechnung, p. 652.

zeichnen wir mit $z^{(0)}$, ihre Ableitungen erster Ordnung mit $p^{(0)}$ und $q^{(0)}$.

Wir erinnern nun daran, dass in der klassischen Theorie stets vorausgesetzt wird, dass die Extremalfunktion zweimal stetig derivierbar ist. Unter dieser keineswegs sachgemässen Annahme leitet man für die Extremalfunktion in bekannter Weise die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung her:

$$\frac{\partial}{\partial y} (f_q) + \frac{\partial}{\partial x} (f_p) = f_{pp} r + 2 f_{pq} s + f_{qq} t = 0. \quad (I)$$

Es war Herr A. HAAR der erste, welcher ohne Voraussetzung der Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung Differentialgleichungen erster Ordnung für die Extremale erhielt. Er fand zwei Gleichungen, in welchen ausser der Extremalfunktion eine Hilfsfunktion $m(x, y)$ vorkommt, und welche wie folgt lauten:²⁾

$$f_q = \frac{\partial m}{\partial x}, f_p = -\frac{\partial m}{\partial y}. \quad (II)$$

Diese Gleichungen erster Ordnung drücken dieselbe Tatsache aus wie die Gleichung zweiter Ordnung (I), dass nämlich der Ausdruck

$$f_q dx - f_p dy$$

ein vollständiges Differential sein muss.

2. Wenn es sich um ein Flächenproblem handelt, so kann man die Extremalfunktion, anschaulich zu reden, nicht nur in der z -Richtung, sondern auch in den x - und y -Richtungen variieren, und die HAARSche Methode ergibt dann drei Gleichungspaare. Ich habe aus diesen Gleichungspaaren für das Variationsproblem der Minimalflächen in einfachster Weise den Schluss ziehen können, dass jede einmal stetig derivierbare Fläche, die bei gegebener Begrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt besitzt, analytisch ist.³⁾ Auf Anregung des Herrn A. HAAR habe ich nun die Frage untersucht, ob man auch im Falle eines Funktionenproblems weitere Gleichungspaare für die Extremalfunktion erhalten kann. Durch Betrachtung geeigneter Variationen ergab sich, dass dies in der Tat möglich ist. Das Ergebnis sprechen wir im folgenden Satze aus:

²⁾ A. HAAR, Über die Variation der Doppelintegrale, Journal für Mathematik Bd. 149 (1919), p. 1—18.

³⁾ Über den analytischen Charakter der Minimalflächen, erscheint in der Math. Zeitschrift.

Satz A) Die Extremalfunktion $z^{(0)}(x, y)$ befriedigt, zusammen mit drei Hilfsfunktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$, welche in Innern der Randkurve C einmal stetig derivierbar sind, die folgenden drei Paare von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$p^{(0)} f_q(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, f(p^{(0)}, q^{(0)}) - p^{(0)} f_p(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, (III_1)$$

$$f(p^{(0)}, q^{(0)}) - q^{(0)} f_q(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, q^{(0)} f_p(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, (III_2)$$

$$f_q(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, f_p(p^{(0)}, q^{(0)}) = -\frac{\partial \omega_3}{\partial y}. (III_3)$$

Das dritte Gleichungspaar ist durch Herrn A. HAAR abgeleitet worden. Wir wollen sofort bemerken, dass wenn die Extremalfunktion zweimal stetig derivierbar ist, dieses Gleichungssystem mit einer einzigen Gleichung gleichwertig ist, nämlich mit der LAGRANGESchen Gleichung des Problems. Unter Voraussetzung der Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung folgert man in der Tat aus den Gleichungen (III):

$$\frac{\partial}{\partial y} (p^{(0)} f_q) - \frac{\partial}{\partial x} (f - p^{(0)} f_p) = p^{(0)} (f_{pp} r^{(0)} + 2 f_{pq} s^{(0)} + f_{qq} t^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (f - q^{(0)} f_q) - \frac{\partial}{\partial x} (q^{(0)} f_p) = -q^{(0)} (f_{pp} r^{(0)} + 2 f_{pq} s^{(0)} + f_{qq} t^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (f_q) + \frac{\partial}{\partial x} (f_p) = f_{pp} r^{(0)} + 2 f_{pq} s^{(0)} + f_{qq} t^{(0)} = 0,$$

wobei $r^{(0)}$, $s^{(0)}$, $t^{(0)}$ die Ableitungen zweiter Ordnung von $z^{(0)}$ bedeuten. Die dritte Gleichung ist die LAGRANGESche, die beiden ersten sind offenbar Folgen der dritten. Ob eine derartige Abhängigkeit auch für die Gleichungspaare (III) erwiesen werden kann, natürlich ohne Voraussetzung der Existenz von $r^{(0)}$, $s^{(0)}$, $t^{(0)}$, scheint keine ganz leichte Frage zu sein. Solange dieser Punkt nicht aufgeklärt ist, dürfte es vorteilhaft sein, die drei Gleichungspaare (III) gleichzeitig zu verwenden.

3. Bevor wir zur Herleitung dieser Gleichungen übergehen, betrachten wir etwas genauer den einfachen und wichtigen Fall

$$f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$

welcher bekanntlich auf die Minimalflächen führt. Wenn wir die Bezeichnung

$$W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}, W^{(0)} = (1 + (p^{(0)})^2 + (q^{(0)})^2)^{1/2}$$

eingeführen, so lauten die Gleichungen (III):

$$\begin{aligned} \frac{p^{(0)} q^{(0)}}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, & \frac{1 + (q^{(0)})^2}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \\ \frac{1 + (p^{(0)})^2}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, & \frac{p^{(0)} q^{(0)}}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, \\ \frac{q^{(0)}}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, & \frac{p^{(0)}}{W^{(0)}} &= -\frac{\partial \omega_3}{\partial y} \end{aligned} \quad (IV)$$

Es ist nun l. c.³⁾ gerade gezeigt worden, dass jede in einem Gebiete einmal stetig derivierbare Funktion, welche zusammen mit drei Hilfsfunktionen das System (IV) befriedigt, analytisch ist. Wir haben also den Satz:

Satz B) *Handelt es sich speziell um das Funktionenproblem mit*

$$f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$

so ist die Extremalfunktion analytisch.

An diesem Satze ist bereits interessant, dass überhaupt die Existenz der Ableitungen zweiter und höherer Ordnung behauptet werden kann. Wir bemerken noch, dass Satz B) inhaltlich nicht identisch mit dem l. c.³⁾ bewiesenen Satze ist, welcher die Analytizität der einmal stetig derivierbaren Flächen gewährleistet, die bei gegebener Begrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt haben. Die Extremalfunktion des Funktionenproblems mit

$$f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$$

definiert nämlich ein Flächenstück, welches nur *im Vergleich mit gewissen besonderen Flächen* einen möglichst kleinen Flächeninhalt besitzt, und zwar im Vergleich mit denjenigen Flächen, welche *im Grossen* durch eine Gleichung $z = z(x, y)$ dargestellt werden können, unter $z(x, y)$ eine *eindeutige* Funktion verstanden.

Die Frage nach der Abhängigkeit der Gleichungspaare (III) kann im vorliegenden Falle wie folgt formuliert werden:

Sei $z^{(0)}(x, y)$ eine einmal stetig derivierbare Funktion, welche zusammen mit einer einmal stetig derivierbaren Hilfsfunktion das dritte Gleichungspaar (IV) befriedigt. Kann man dann die Existenz von zwei weiteren Hilfsfunktionen behaupten, welche zusammen mit $z^{(0)}(x, y)$ die beiden ersten Gleichungspaare (IV) befriedigen? Oder: kann man aus dem dritten Gleichungspaar (IV) allein Schlüsse über die Existenz der zweiten Ableitungen von $z^{(0)}(x, y)$ ziehen?

Es möge noch eine interessante Folgerung negativen Charakters erwähnt werden, die sich aus Satz B) ergibt, dass nämlich

bei dem Funktionenproblem mit

$$f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$$

im Allgemeinen keine (einmal stetig derivierbare) Extremalfunktion existiert, während für das entsprechende PLATEAUSCHE Flächenproblem die Existenz der Extremalfläche physikalisch evident ist. Aus Satz B) folgt zunächst, dass die Extremalfunktion gewiss stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, und demzufolge der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen genügt. Sie liefert also eine im Innern der Randkurve C reguläre Lösung dieser Gleichung, welche auf der Kurve C vorgeschriebene Randwerte annimmt. Die Nichtexistenz im Allgemeinen der Extremalfunktion folgt nun einfach daraus, dass die Randwertaufgabe der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen im Allgemeinen keine Lösung hat. Auf diese wichtige Tatsache scheint zuerst Herr S. BERNSTEIN hingewiesen zu haben.⁴⁾

4. Wir wollen nun Satz A) beweisen. Das Gleichungspaar (III₃) ist, wie bereits erwähnt, von Herrn A. HAAR abgeleitet worden, durch Betrachtung der üblichen Variationen, anschaulich gesprochen, in der z -Richtung. Da wir nun mit Funktionenproblemen zu tun haben, so können wir die bei Flächenproblemen zulässigen Variationen in den x - bzw. y -Richtungen nicht anwenden. Wir werden uns der Methode der Variation der unabhängigen Variablen bedienen, „die bei den älteren Autoren über Variationsrechnung eine grosse Rolle gespielt hat. Sie hat viel Unklarheit in die Variationsrechnung gebracht,“⁵⁾ und deswegen wollen wir den an sich sehr einfachen Gedankengang mit der grössten Sorgfalt darstellen.

Wir zeichnen einen Kreis K , welcher ganz innerhalb der Kurve C liegt, und werden die Extremalfunktion $z^{(0)}$ innerhalb dieses Kreises in geeigneter Weise variieren. Zu dem Ende nehmen wir eine Funktion $t(x, y)$ an, die innerhalb K einmal stetig differenzierbar ist, auf K nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet, sonst aber ganz beliebig ist. Mit M bezeichnen wir eine positive Konstante, so dass in K

⁴⁾ S. BERNSTEIN, Sur les equations du calcul des variations, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3. série, tome XXIX (1912), vgl. insbesondere p. 469.

⁵⁾ Siehe l. c. ¹⁾, p. 49. Fussnote

$$\left| \frac{\partial t}{\partial x} \right| < M \quad (1)$$

gilt, und führen weiter einen reellen Parameter ε ein, welcher auf das Intervall

$$-\frac{1}{2}M < \varepsilon < \frac{1}{2}M \quad (2)$$

beschränkt wird. Es gilt also:

$$1 + \varepsilon \frac{\partial t}{\partial x} > \frac{1}{2} \quad (3)$$

Nunmehr nehmen wir eine zweite Koordinatenebene (u, v) an, und zeichnen in derselben einen Kreis K^* , welcher aus dem Kreise K durch die Transformation $T_0: x=u, y=v$ hervorgeht, also in Bezug auf das System (u, v) die gleiche Lage hat, wie der Kreis K in Bezug auf das System (x, y) . Mit $\zeta(u, v)$, $\tau(u, v)$ bezeichnen wir die Funktionen, welche durch die Transformation T_0 aus den Funktionen $z^{(0)}(x, y)$, $t(x, y)$ hervorgehen. Diese Funktionen sind also in K^* einmal stetig derivierbar, sie bleiben ferner auf K^* nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig. Der grösseren Deutlichkeit halber merken wir noch die selbstverständlichen Formeln an:

$$\begin{aligned} z^{(0)} &= \zeta, & p^{(0)} &= \zeta_u, & q^{(0)} &= \zeta_v, \\ t &= \tau, & t_x &= \tau_u, & t_y &= \tau_v. \end{aligned} \quad \Big|_{T_0} \quad (4)$$

wobei das beigefügte Zeichen

$$\Big|_{T_0}$$

darauf hinweisen soll, dass die Argumente x, y und u, v durch die Transformation T_0 zusammenhängen.

Wir erklären nun, für jeden der Beziehung (3) genügenden Wert des Parameters ε , eine Transformation T_ε durch die Formeln:

$$T_\varepsilon: \begin{cases} x = u + \varepsilon \tau(u, v), \\ y = v. \end{cases} \quad (5)$$

Für $\varepsilon=0$ reduziert sich dieselbe auf $x=u, y=v$, so dass wir mit der bereits eingeführten Bezeichnung T_0 im Einklang bleiben. Wir behaupten nun, dass durch die Transformation T_ε die Kreisscheibe K^* umkehrbar eindeutig und stetig auf die Kreisscheibe K abgebildet wird. Zunächst ist klar, dass T_ε in und auf K^* eindeutig und stetig erklärt ist, und dass der Kreislinie K^* selbst

umkehrbar eindeutig und stetig die Kreislinie K entspricht. Weiter ist klar, dass zwei verschiedenen Punkten in oder auf K^* nur dann derselbe Punkt der xy -Ebene entsprechen könnte, wenn die beiden Punkte auf derselben horizontalen Sehne von K^* liegen. Auf einer solchen Sehne ist aber, nach (5), die Koordinate y konstant, die Koordinate x aber eine *monotone* Funktion von u , da nach (5):

$$x_u = 1 + \varepsilon \tau_u$$

ist, und dieser Ausdruck nach (3) und (4) stets positiv ist. Einer horizontalen Sehne von K^* entspricht also umkehrbar eindeutig und stetig eine horizontale Strecke. Die Endpunkte dieser Strecke liegen aber, da der Kreislinie K^* die Kreislinie K entspricht, auf K , so dass den inneren Punkten der Sehne solche Punkte entsprechen, die innerhalb K liegen.

Damit ist gezeigt, dass durch die Formeln (5) die abgeschlossene Kreisfläche K^* umkehrbar eindeutig und stetig auf die abgeschlossene Kreisfläche K abgebildet wird. Wir merken noch die Formeln an:

$$\left. \begin{aligned} x_u &= 1 + \varepsilon \tau_u, & x_v &= \varepsilon \tau_v, \\ y_u &= 0, & y_v &= 1, \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= 1 + \varepsilon \tau_u > \frac{1}{2}, \end{aligned} \right|_{T_\varepsilon} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1}{1 + \varepsilon \tau_u}, & u_y &= -\frac{\varepsilon \tau_v}{1 + \varepsilon \tau_u}, \\ v_x &= 0, & v_y &= 1, \end{aligned} \right|_{T_\varepsilon} \quad (7)$$

wobei die Indices in üblicher Weise Ableitungen bedeuten, und das Zeichen

$$\left|_{T_\varepsilon}\right.$$

wiederum die Bedeutung hat, dass die Argumente x, y und u, v durch die Transformation T_ε zusammenhängen. Wir bemerken noch, dass nur solche Punkte (u, v) betrachtet werden, die in oder auf K^* liegen.

5. Wir erklären nun ein Flächenstück F_ε durch die Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= u + \varepsilon \tau(u, v), \\ y &= v, \\ z &= \zeta(u, v). \end{aligned} \quad (8)$$

Da die Koordinaten x, y durch die umkehrbar eindeutige Transformation T_ϵ aus u, v hervorgehen, so folgt sogleich, dass man u und v eliminieren kann, und auf diese Weise erhält man für F_ϵ eine Darstellung in der Form

$$z = z_\epsilon(x, y),$$

wobei $z_\epsilon(x, y)$ innerhalb K eindeutig ist. Da alle die vorkommenden Funktionen einmal stetig derivierbar sind, so erhält man durch einfache Rechnung, unter Beachtung von (8) und (7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_\epsilon}{\partial x} &= \frac{\zeta_u}{1 + \epsilon \tau_u} \\ \frac{\partial z_\epsilon}{\partial y} &= \zeta_v - \frac{\epsilon \zeta_u \tau_v}{1 + \epsilon \tau_u} \end{aligned} \right| T_\epsilon \quad (9)$$

Aus den Formeln (9), (8), und (4) ersieht man unmittelbar:

a) Für $\epsilon = 0$ reduziert sich die Funktion $z_\epsilon(x, y)$ auf die Extremalfunktion $z^{(0)}(x, y)$, d. h. es ist $z^{(0)} = z_0$.

b) Die Funktion $z_\epsilon(x, y)$ ist innerhalb K einmal stetig derivierbar, bleibt auf K nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig, und stimmt auf der Kreislinie K selbst mit der Extremalfunktion $z^{(0)} = z_0$ nebst den Ableitungen erster Ordnung überein, da ja $\tau(u, v)$ auf der Kreislinie K^* nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet.

Aus b) folgt nun, dass wir eine Konkurrenzfunktion erhalten, wenn wir die Extremalfunktion $z^{(0)}(x, y)$ innerhalb K durch die Funktion $z_\epsilon(x, y)$ ersetzen. Da ausserhalb K die so erhaltene Funktion mit $z^{(0)}$ übereinstimmt, so muss infolge der Extremaleigenschaft von $z^{(0)}$ die Ungleichung gelten:

$$\iint_{(K)} f\left(\frac{\partial z_\epsilon}{\partial x}, \frac{\partial z_\epsilon}{\partial y}\right) dx dy \geq \iint_{(K)} f\left(\frac{\partial z^{(0)}}{\partial x}, \frac{\partial z^{(0)}}{\partial y}\right) dx dy. \quad (10)$$

Wird das linksstehende Integral als Funktion des Parameters ϵ mit $I(\epsilon)$ bezeichnet, so ist das rechtsstehende Integral, nach a), gleich $I(0)$. Die Funktion

$$I(\epsilon) = \iint_{(K)} f\left(\frac{\partial z_\epsilon}{\partial x}, \frac{\partial z_\epsilon}{\partial y}\right) dx dy \quad (11)$$

hat also für $\epsilon = 0$ ein Minimum. Indem wir die übliche Schlussweise anwenden, berechnen wir zunächst die Ableitung $I'(\epsilon)$. Zu dem Ende führen wir im Integral (11) auf Grund der Formeln

(5) neue Variablen u, v ein, und erhalten unter Beachtung von (9) und (6):

$$I(\varepsilon) = \iint_{(K^*)} f \left[\frac{\xi_u}{1 + \varepsilon \tau_u}, \xi_v - \frac{\varepsilon \xi_u \tau_v}{1 + \varepsilon \tau_u} \right] (1 + \varepsilon \tau_u) du dv.$$

Jetzt üben wir auf die Variablen u, v die Transformation $T_0: u = x, v = y$ aus und erhalten auf Grund der Formeln (4):

$$I(\varepsilon) = \iint_{(K)} f \left[\frac{p^{(0)}}{1 + \varepsilon t_x}, q^{(0)} - \frac{\varepsilon p^{(0)} t_y}{1 + \varepsilon t_x} \right] (1 + \varepsilon t_x) dx dy. \quad (12)$$

Wir überzeugen uns leicht, dass hier unter dem Integralzeichen nach ε deriviert werden kann. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} (f[\dots](1 + \varepsilon t_x)) &= f[\dots]_x - (1 + \varepsilon t_x) \left(f_p[\dots] \frac{p^{(0)} t_x}{(1 + \varepsilon t_x)^2} + \right. \\ &\quad \left. + f_q[\dots] \frac{p^{(0)} t_y (1 + \varepsilon t_x) - \varepsilon p^{(0)} t_x t_y}{(1 + \varepsilon t_x)^2} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

wobei in die Klammern $[\dots]$ dieselben Argumente einzusetzen sind wie bei der Formel (12). Der gefundene Ausdruck ist für die betrachteten Werte von ε und für alle Punkte (x, y) in oder auf K offenbar stetig, und damit ist die Derivation unter dem Integralzeichen in Formel (12) gerechtfertigt. Da nun $I(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ Minimum wird, so folgern wir:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \\ &= \iint_{(K)} \left\{ [f(p^{(0)}, q^{(0)}) - p^{(0)} f_p(p^{(0)}, q^{(0)})] t_x - p^{(0)} f_q(p^{(0)}, q^{(0)}) t_y \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

6. Setzen wir für einen Augenblick:

$$\begin{aligned} a(x, y) &= f(p^{(0)}, q^{(0)}) - p^{(0)} f_p(p^{(0)}, q^{(0)}), \\ b(x, y) &= -p^{(0)} f_q(p^{(0)}, q^{(0)}), \end{aligned} \quad (15)$$

so sind $a(x, y)$, $b(x, y)$ in und auf K stetig, und wir haben mit (14) bewiesen:

Ist $t(x, y)$ eine Funktion, welche innerhalb K einmal stetig derivierbar ist, auf K nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet, sonst aber ganz beliebig ist, so verschwindet das Integral:

$$\iint_{(K)} (a t_x + b t_y) dx dy.$$

Daraus folgt nun nach einem wichtigen Hilfssatze, welchen Herr

A. HAAR bei der Ableitung der Gleichungen (II) bewiesen hatte,⁶⁾ dass das Kurvenintegral

$$\int a \, dy - b \, dx \quad (16)$$

für jeden geschlossenen, innerhalb K verlaufenden Integrationsweg verschwindet. Nun sind aber $a(x, y)$, $b(x, y)$ nicht nur in K , sondern überhaupt im ganzen Innern der Randkurve C stetig erklärt, während K ein beliebiger innerhalb C gelegener Kreis war. Daraus folgt nach einfachster Überlegung, dass das Kurvenintegral (16) überhaupt für jeden geschlossenen Integrationsweg innerhalb C verschwindet. Wenn also (α, β) einen festen Punkt innerhalb C bedeutet, so ist das Integral

$$\int_{(\alpha, \beta)}^{(x, y)} a \, dy - b \, dx$$

vom Wege unabhängig, und definiert eine innerhalb C eindeutige Funktion $\omega_1(x, y)$, für welche dann bekanntlich die Beziehungen gelten:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = -b, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = a,$$

und damit ist, mit Rücksicht auf (15), das Gleichungspaar (III) erhalten.

Um das zweite Paar (III) abzuleiten, hat man nur die Transformation T_ϵ in der Form

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= v + \epsilon \tau(u, v) \end{aligned}$$

anzusetzen, während das dritte Paar durch die übliche Betrachtung von Vergleichsfunktionen der Form

$$z_\epsilon(x, y) = z^{(0)}(x, y) + \epsilon l(x, y)$$

erhalten wird.

Szeged, den 19. IV. 1925.

⁶⁾ L. c. 2). Ein sehr einfacher Beweis findet sich bei L. LICHTENSTEIN, Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten, Annales de la Société Polonaise de Mathématique (1924), siehe insbesondere p. 27—28.